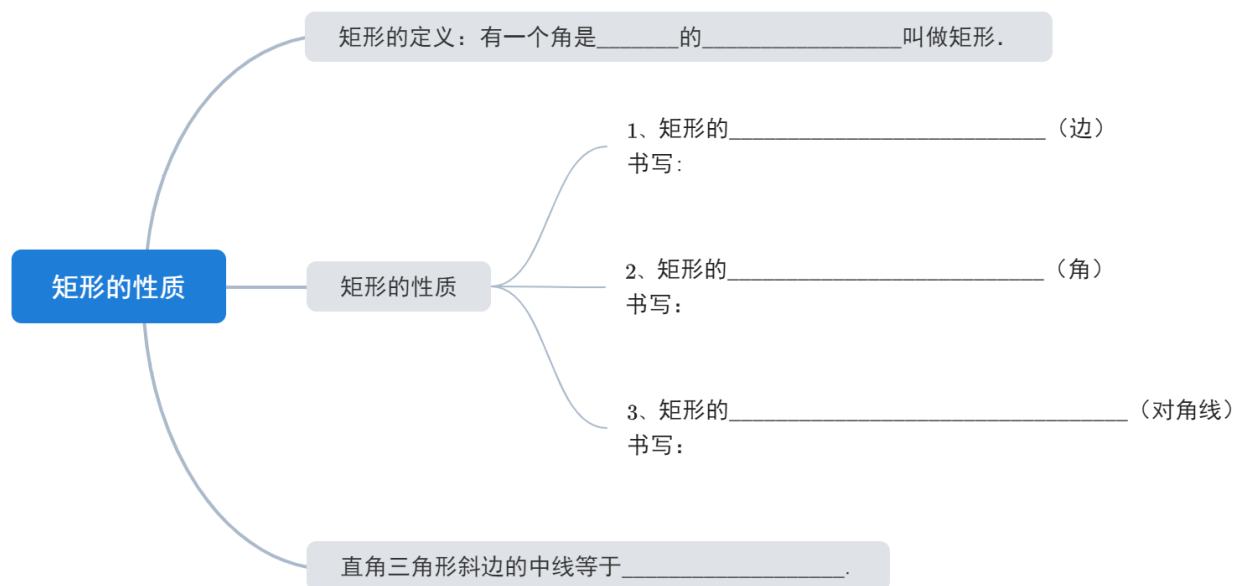


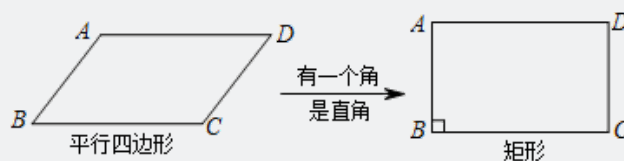
第2讲 矩形与菱形

一、矩形的性质



【教法备注】

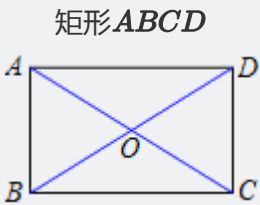
1、矩形的定义：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形。



2、矩形的性质：

①矩形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质

②由于它有一个角是直角，因此还具有自己独特的性质

图形	性质		符号表示
	边	矩形的对边平行且相等	$AB = CD$, $AD = BC$ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$
	角	矩形的四个角都是直角	$\angle ABC = \angle BCD$ $= \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
	对角线	矩形的对角线相等 矩形的对角线互相平分	$AC = BD$ $OA = OC = OB = OD$

书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD$, $AD = BC$,

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$,

$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$,

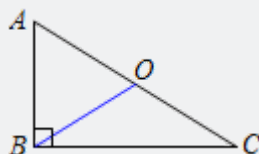
$AC = BD$,

$OA = OC = OB = OD$,

注意：做题时根据实际需要，只写出相应的性质即可。

3、直角三角形斜边中线：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $OA = OC$ ，则 $OB = OA = OC = \frac{1}{2}AC$ 。



书写：

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OC$ ，

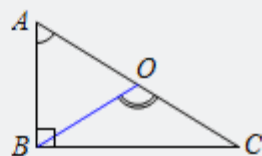
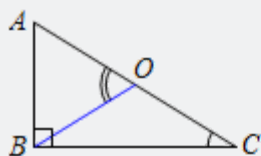
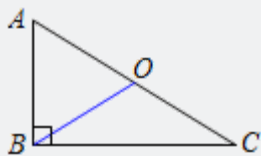
$\therefore OB = OA = OC = \frac{1}{2}AC$ 。

【拓展】

(1) 已知，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $OA = OB$ ，则 $OA = OC$ 。

(2) 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $OA = OB = OC$ ，则 $\angle ABC = 90^\circ$ 。

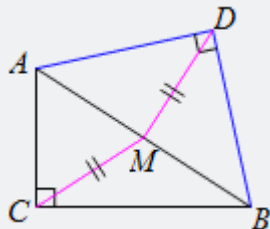
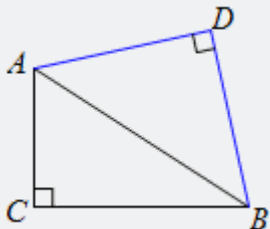
(3) 已知， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OC$ ，则 $\angle AOB = 2\angle C$ ， $\angle BOC = 2\angle A$ 。



遇存在公共边的两个直角三角形时，要想到构造两个直角三角形斜边的中线。

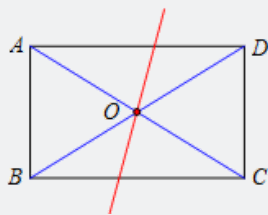
如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 有公共斜边 AB 。

辅助线作法：取 AB 中点 M ，连接 CM 、 DM ，可证明 $CM=DM$ 。



4、矩形的对称性：矩形是中心对称图形，也是轴对称图形。

①矩形的对称中心是对角线的交点，过这点的任意直线可将矩形分成两个全等的图形。



②矩形有2条对称轴，是过对边中点的直线就是它的对称轴。

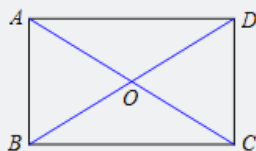


总结：

①矩形的对边平行且相等，邻边互相垂直；四个角都是直角，对角线互相平分且相等。

②全等三角形有： $\triangle ABC \cong \triangle DCB \cong \triangle BAD \cong \triangle CDA$ ， $\triangle AOD \cong \triangle COB$ ， $\triangle AOB \cong \triangle COD$

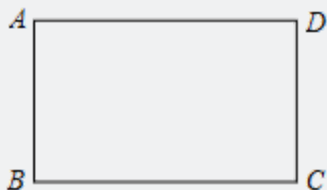
③对角线将矩形分成4个面积相等的等腰三角形。



5、矩形的周长：

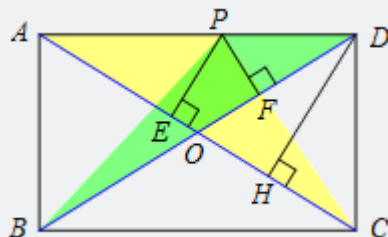
①矩形的周长：一组邻边之和的2倍。如图，周长 $C = 2(AB + BC)$ 。

②矩形的面积：一组邻边的乘积。如图，面积 $S = AB \cdot BC$ 。

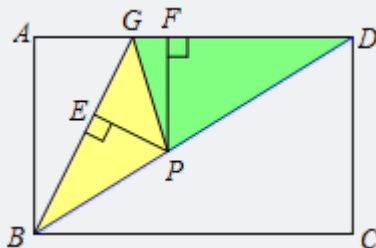


【拓展】

(1) 已知：点 P 是矩形边 AD 上一点， $PE \perp AC$ ， $PF \perp BD$ ， $DH \perp AC$ ，则 $PE + PF = DH$ 。

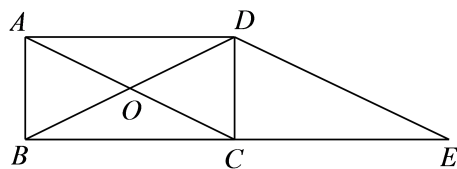


(2) 已知：点 G 是矩形边 AD 上一点， $BG = DG$ ，点 P 是矩形对角线 BD 上一点， $PE \perp BG$ ， $PF \perp AD$ ，则 $PE + PF = AB$ 。



|| 例题

1. 如图．矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 D 做 $DE \parallel AC$ ，交 BC 的延长线于点 E ，已知 $\angle AOD = 130^\circ$ ， $\angle DEC$ 的度数为（ ）。



A. 25°

B. 35°

C. 30°

D. 65°

【答案】 A

【解析】 $\because AC \parallel DE$ ，

$\therefore \angle OCB = \angle DEC$ 。

$\because O$ 为矩形 $ABCD$ 的对角线交点。

$\therefore OB = OC$ ， $\angle OBC = \angle OCB$ ， $\angle BOC = \angle AOD = 130^\circ$ ，

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 25^\circ .$$

$$\therefore \angle DEC = 25^\circ .$$

【标注】【知识点】平行线的性质

【知识点】矩形的性质

【能力】推理论证能力

【重点强调】

2017~2018学年天津塘沽区初二下学期期中第8题3分

2. 矩形 $ABCD$ 较短的边长为3，对角线 AC 、 BD 的夹角为 60° ，则矩形的对角线长为 _____ .

【答案】6

【解析】如图所示，设对角线的交点为 O ，

由题可知： $AB = 3$ ， $\angle AOB = 60^\circ$.

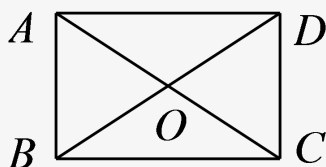
$\therefore$ 矩形的对角线互相平分且相等，

$\therefore AO = BO$ ，

$\therefore \angle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AO = AB = 3$ ，

$\therefore AC = 6$ ，即矩形的对角线长为6 .



【标注】【知识点】等边三角形的判定

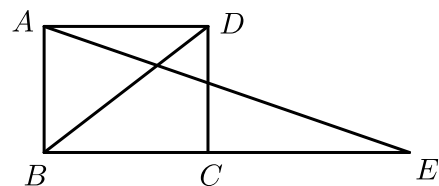
【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区初二下学期期中第14题3分

练习

3. 如图，延长矩形 $ABCD$ 的边 BC 至点 E ，使 $CE = BD$ ，连接 AE ，如果 $\angle ADB = 30^\circ$ ，则 $\angle E =$ _____ 度 .



【答案】 15

【解析】 连接 AC ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,

$\therefore AD \parallel BE$, $AC = BD$, 且 $\angle ADB = \angle CAD = 30^\circ$,

$\therefore \angle E = \angle DAE$,

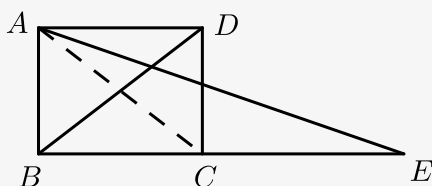
又 $\because BD = CE$,

$\therefore CE = CA$,

$\therefore \angle E = \angle CAE$,

$\therefore \angle CAD = \angle CAE + \angle DAE$,

$\therefore \angle E + \angle E = 30^\circ$, 即 $\angle E = 15^\circ$.



【标注】 【能力】 推理论证能力

【知识点】 平行线的性质

【知识点】 矩形的性质

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期期末第15题3分

4. 如果矩形的一条对角线长为 8cm , 两条对角线的一个夹角为 120° , 则矩形的较短边长为 () .

A. 4cm

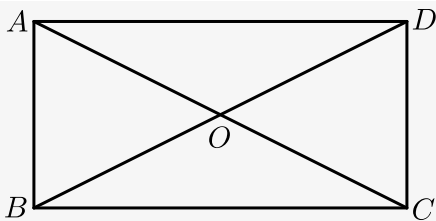
B. $4\sqrt{2}\text{cm}$

C. $4\sqrt{3}\text{cm}$

D. 8cm

【答案】 A

【解析】 如图 , $\angle AOD = 120^\circ$, $AC = 8\text{cm}$.



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,
 $\therefore BD = AC = 8\text{cm}$, $OA = OB = 4\text{cm}$.
 $\therefore \angle AOD = 120^\circ$,
 $\therefore \angle AOB = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形 ,
 $\therefore AB = OA = 4\text{cm}$.
 故选 A .

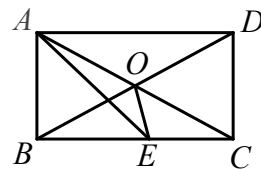
【标注】【知识点】等边三角形的性质

【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2019~2020 学年天津和平区初二下学期期中第 7 题 3 分

5. 如图 , O 是矩形 $ABCD$ 对角线的交点 , AE 平分 $\angle BAD$, $\angle AOD = 120^\circ$, 则 $\angle AEO =$ _____ 度 .



【答案】 30

【解析】 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,
 $\therefore AD \parallel BC$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AC = BD$, $OB = \frac{1}{2}BD$, $OC = \frac{1}{2}AC$,
 $\therefore OB = OC$,
 $\therefore \angle OBC = \angle OCB$,
 $\therefore \angle BOC = \angle AOD = 120^\circ$,
 $\therefore \angle OBC = 30^\circ$,
 $\therefore AE$ 平分 $\angle BAD$,
 $\therefore \angle BAE = \angle EAD = 45^\circ$,
 $\therefore \angle AEB = \angle EAD = \angle BAE = 45^\circ$,

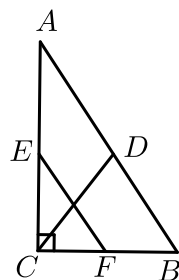
$$\begin{aligned}
&\therefore AB = BE, \\
&\therefore \angle AOD = 120^\circ, \\
&\therefore \angle AOB = 60^\circ, \\
&\therefore AB = OA = OB, \\
&\therefore OB = BE, \\
&\therefore \angle BOE = \angle BEO, \\
&\therefore \angle OEB = 75^\circ, \\
&\therefore \angle AEO = \angle OEB - \angle AEB = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.
\end{aligned}$$

故答案为：30 .

【标注】【知识点】矩形的性质

|| 例题

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D, E, F 分别为 AB, AC, BC 的中点．若 $CD = 5$ ，则 EF 的长为 _____ .



【答案】5

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是直角三角形， CD 是斜边的中线，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB,$$

又 $\because EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore AB = 2CD = 2 \times 5 = 10,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} \times 10 = 5.$$

【标注】【知识点】三角形的中位线

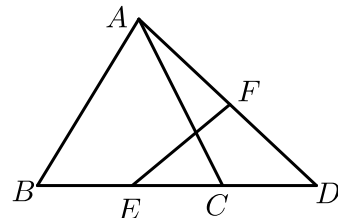
【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【重点强调】

题型：直角三角形斜边中线问题

练习

7. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 延长线上一点， $CD = \frac{1}{2}BC$ ， E ， F 分别是 BC ， AD 的中点，若 $AB = 2$ ，则线段 EF 的长是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【解析】 连接 AE ，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

E 为 BC 中点，

$\therefore AE \perp BC$ ，

$BE = EC = 1$ ，

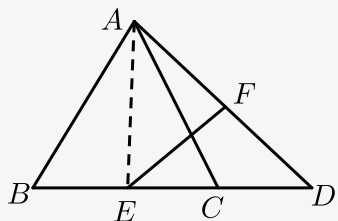
$\therefore \triangle AED$ 为直角三角形，

$AE = \sqrt{3}$ ， $ED = 2$ ，

$\therefore AD = \sqrt{7}$ ，

$\because F$ 为 AD 中点，

$\therefore EF = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 。



【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

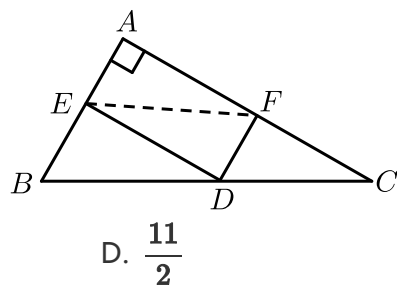
【重点强调】

2019年天津北辰区初三二模第17题3分

例题

8.

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $AB = 6$ ，点 D 是 BC 边上的动点(不与 B ， C 重合)过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，作 $DF \perp AC$ 于点 F ，则 EF 的最小值是()。



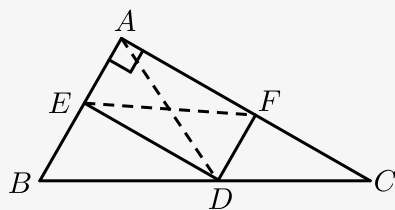
- A. 3 B. $\frac{24}{5}$ C. 5 D. $\frac{11}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\because$ Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BA = 6$ ，

$\therefore BC = 10$ ，

连接 AD ，



$\because DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $EAFD$ 是矩形，

$\therefore EF = AD$ ，

当 AD 最小时，则 EF 最小，根据垂线段最短可知当 $AD \perp BC$ 时，则 AD 最小，

$$\therefore EF = AD = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5} .$$

故选B .

【标注】 【知识点】矩形的性质

【知识点】矩形的判定-从四边形

【知识点】垂线段最短

【重点强调】

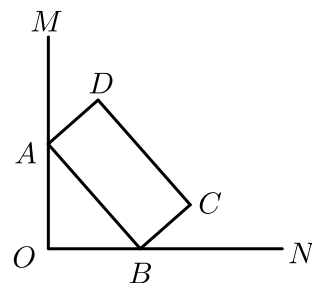
题型：矩形对角线最值问题

2017~2018学年天津红桥区初二下学期期末第12题3分

练习

9.

如图， $\angle MON = 90^\circ$ ，矩形 $ABCD$ 在 $\angle MON$ 的内部，顶点 A, B 分别在射线 OM, ON 上， $AB = 4, BC = 2$ ，则点 D 到点 O 的最大距离是（ ）。



A. $2\sqrt{2} - 2$

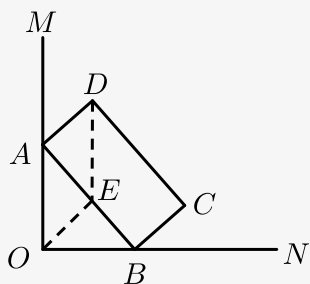
B. $2\sqrt{2} + 2$

C. $2\sqrt{5} - 2$

D. $\sqrt{2} + 2$

【答案】B

【解析】



取 AB 中点 E ，连结 OE 、 DE ，

$\because \angle MON = 90^\circ$ ， A, B 分别在射线 OM, ON 上，

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\because AB = 4, AE = BE$ ，

$\therefore OE = \frac{1}{2}AB = 2$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle DAB = 90^\circ$ ，

$\because AE = \frac{1}{2}AB = 2, BC = AD = 2$ ，

$\therefore DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore OE + DE \geq OD$ ，

$\therefore$ 当且仅当 O, E, D 三点共线时，

$OE + DE = OD$ ，此时 OD 取得最大值，

最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 D 到点 O 的最大距离为 $2\sqrt{2} + 2$ 。

故选B。

【标注】【知识点】矩形的性质

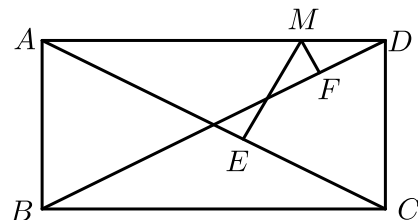
【知识点】直接用勾股求边长

【知识点】勾股定理

【能力】推理论证能力

例题

10. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ， M 是 AD 上任意一点，且 $ME \perp AC$ 于 E ， $MF \perp BD$ 于 F ，则 $ME + MF$ 为（ ）。



A. $\frac{24}{5}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{6}{5}$

D. 不能确定

【答案】A

【解析】设 AC 与 BD 相交于 O 点，连接 OM ，

$\therefore$ 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，

$$\therefore AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10,$$

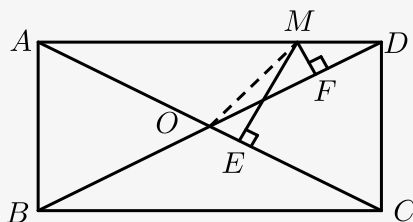
$$S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot BC = 48,$$

$$\therefore OA = OD = 5, S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形}ABCD} = 12,$$

$\therefore ME \perp AC$ ， $MF \perp BD$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle DOM} = \frac{1}{2} OA \cdot ME + \frac{1}{2} OD \cdot MF = \frac{5}{2} (ME + MF) = 12$$

$$\therefore ME + MF = \frac{24}{5}.$$



【标注】【知识点】矩形的性质

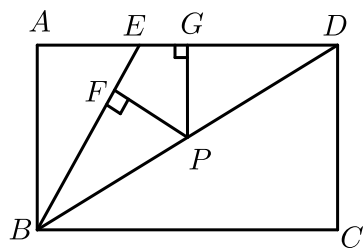
【重点强调】

题型：矩形重要结论

2017~2018学年天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期期中第10题3分

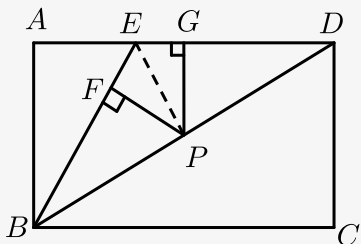
练习

11. 如图， E 是矩形 $ABCD$ 边 AD 上一点，且 $BE = ED$ ， P 是对角线 BD 上任一点， $BD = 4$ ， $BC = 3$ ， $PF \perp BE$ ， $PG \perp AD$ ，垂足分别为 F 、 G ， $PF + PG = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】 连接 PE ,



则 $S_{\triangle BEP} + S_{\triangle DEP} = S_{\triangle BED}$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} BE \cdot PF + \frac{1}{2} DE \cdot PG = \frac{1}{2} DE \cdot AB .$$

又 $\because BE = DE$,

$$\therefore \frac{1}{2} DE \cdot PF + \frac{1}{2} DE \cdot PG = \frac{1}{2} DE \cdot AB ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} DE (PF + PG) = \frac{1}{2} DE \cdot AB .$$

$$\therefore PF + PG = AB .$$

$$\therefore AB = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} ,$$

$$\therefore PF + PG = \sqrt{7} .$$

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角

【知识点】 AAS

【知识点】 直接用勾股求边长

【知识点】 勾股定理

【知识点】 矩形的性质

【能力】 推理论证能力

独步天下

12. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = \sqrt{2}AB$, $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E , $DH \perp AE$ 于点 H , 连接 BH 并延长交 CD 于点 F , 连接 DE 交 BF 于点 O 下列结论: ① $\angle AED = \angle CED$; ② $OE = OD$; ③ $BH = HF$; ④ $BC - CF = 2HE$; ⑤ $AB = HF$, 其中正确的有 _____ (填上序号) .

$$\begin{cases} \angle EBH = \angle OHD \\ BE = DH \\ \angle AEB = \angle HDF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BEH \cong \triangle HDF$ (ASA),

$\therefore BH = HF, HE = DF$, 故③正确;

由上述①、②、③可得 $CD = BE, DF = EH = CE, CF = CD - DF$,

$\therefore BC - CF = (CD + HE) - (CD - HE) = 2HE$, 故④正确;

$\therefore AB = AH, \angle BAE = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ABH$ 不是等边三角形,

$\therefore AB \neq BH$,

$\therefore$ 即 $AB \neq HF$, 故⑤错误;

综上所述, 结论正确的是①②③④.

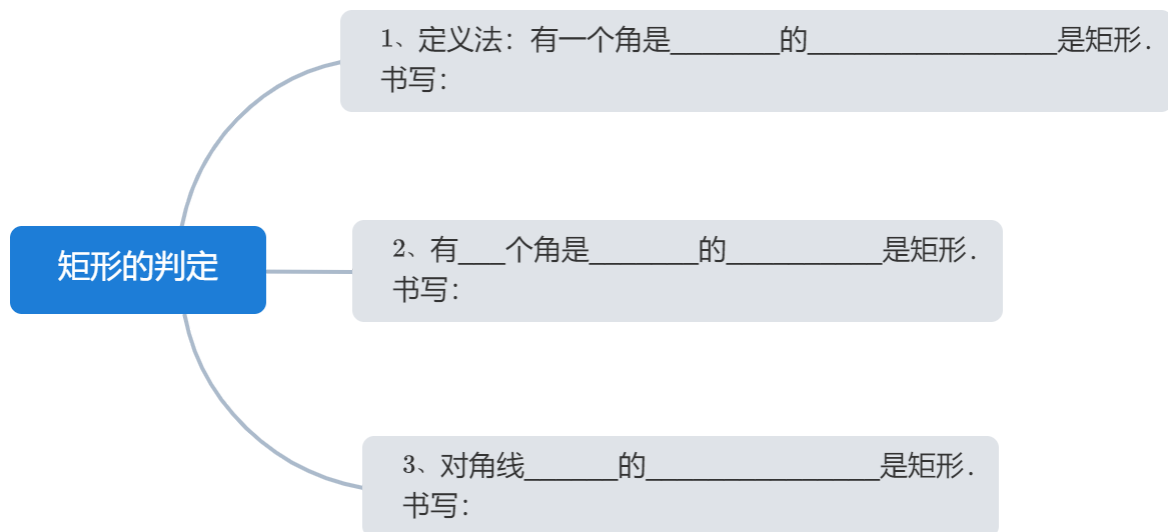
【标注】【知识点】矩形的性质

【重点强调】

矩形性质、判定综合应用; 这道题难度较大, 老师们灵活选择

2019~2020学年天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期开学考试第17题

二、矩形的判定



【教法备注】

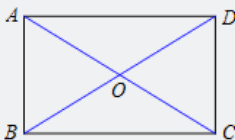
1、有一个角是直角的平行四边形是矩形.



书写： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形．

2、对角线相等的平行四边形是矩形．



书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC = BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形．

3、有三个角是直角的四边形是矩形．



书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形．

总结：

- ① 证明一个四边形是矩形，一般情况下，先证明它是一个平行四边形，然后证明“有一个角为直角”或“对角线相等”即可．
- ② 若直接证明一个四边形是矩形，只要证明有三个角是直角即可．
- ③ 对角线相等且平分的四边形是矩形．

|| 例题

13. 要使平行四边形 $ABCD$ 成为矩形，可以添加的条件是（ ）．

- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $AC \perp BD$ C. $AB = BC$ D. $\angle ABD = \angle CBD$

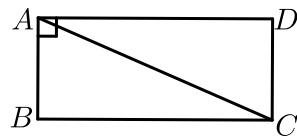
【答案】 A

【解析】 由矩形的判定可知：有一个角是直角的平行四边形是矩形．

【标注】 【知识点】矩形的判定-从平行四边形

【重点强调】

14. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 12$ ， $AC = 13$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形．



【答案】 证明见解析．

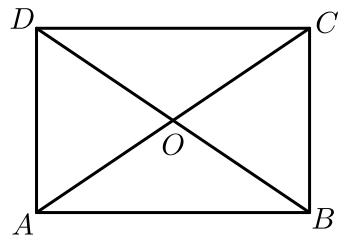
【解析】 四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADC = 90^\circ$ ．
 又 $\because \triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 12$ ， $AC = 13$ ，
 满足 $13^2 = 5^2 + 12^2$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形．

【标注】 【知识点】矩形的判定-从平行四边形

【重点强调】

2018~2019学年天津河东区初二下学期期末第20题6

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，且 $OA = OB$ ．



- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形．
 (2) 若 $AB = 5$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，求 BC 的长．

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) $5\sqrt{3}$ ．

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
 $\therefore OA = OC$ ， $OB = OD$ ，
 又 $\because OA = OB$ ，

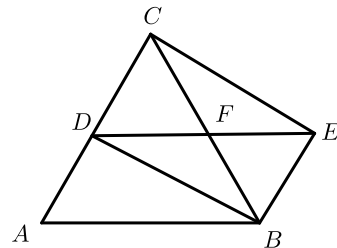
$$\begin{aligned}
&\therefore OA = OC = OB = OD, \\
&AC = BD, \\
&\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 为矩形.} \\
(2) &\therefore AB = 5, \angle AOB = 60^\circ, \\
&\therefore OA = OB = AB = 5, \\
&\text{过点 } O \text{ 作 } OM \perp BC, \\
&\therefore \angle MOB = 60^\circ, \\
&\therefore MB = \frac{5}{2}\sqrt{3}, \\
&\therefore BC = 2MB = 5\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

【重点强调】

2018~2019学年天津滨海新区初二下学期期末第21题10分

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ．四边形 $ABED$ 是平行四边形， DE 交 BC 于点 F ，连接 CE ．求证：四边形 $BECD$ 是矩形．



【答案】证明见解析．

【解析】 $\because AB = BC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，
 $\therefore BD \perp AC$ ， $AD = CD$ ．
 $\because$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形，
 $\therefore BE \parallel AD$ ， $BE = AD$ ，
 $\therefore BE \parallel DC$ ， $BE = DC$ ，
 $\therefore$ 四边形 $BECD$ 是平行四边形．
 $\because BD \perp AC$ ，
 $\therefore \angle BDC = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 平行四边形 $BECD$ 是矩形．

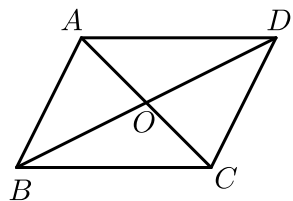
【标注】【知识点】矩形的判定-从平行四边形

【重点强调】

2017~2018学年天津塘沽区初二下学期期中第23题10分

练习

17. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ，请你添加一个条件 _____，使平行四边形 $ABCD$ 是矩形．

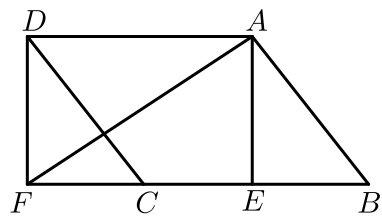


【答案】 $\angle BAD = 90^\circ$

【解析】 $\angle BAD = 90^\circ$.

【标注】 【知识点】 矩形的判定-从平行四边形

18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ，过点 D 作 $DF \parallel AE$ ，交 BC 的延长线于点 F ，连接 AF ．



- (1) 求证：四边形 $AEFD$ 是矩形．

【答案】 (1) 证明见解析．

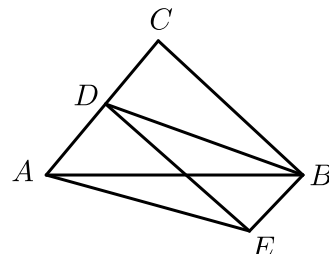
【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore AD \parallel BC$ (平行四边形对边平行) .
又 $\because AE \perp BC$,
 $\therefore \angle AEF = \angle DAE = 90^\circ$.
 $\because DF \parallel AE$,

$\therefore \angle FDA = 90^\circ$. (两直线平行 , 同旁内角互补)

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形 (三个角是直角的四边形是矩形) .

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

19. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AC 的中点 , $DE \perp AC$, $AE \parallel BD$.



(1) 证明 : $\triangle ADE \cong \triangle DCB$.

(2) 连接 BE , 判断四边形 $BCDE$ 的形状 , 并证明 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 矩形 , 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because AE \parallel BD$,

$$\therefore \angle CDB = \angle DAE ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ , DE \perp AC ,$$

$$\therefore \angle C = \angle ADE = 90^\circ ,$$

$$\therefore DE \parallel BC ,$$

$$\because D \text{ 为 } AC \text{ 中点 } ,$$

$$\therefore AD = CD ,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCB$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle DCB \\ AD = CD \\ \angle DAE = \angle CDB \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCB \text{ (ASA)} .$$

(2) 四边形 $BCDE$ 是矩形 .

$$\text{由 (1) 得 : } \triangle ADE \cong \triangle DCB ,$$

$$\therefore DE = BC = 4 , BD = AE = 5 ,$$

$$\text{又 } \because \angle ACB = 90^\circ , DE \perp AC ,$$

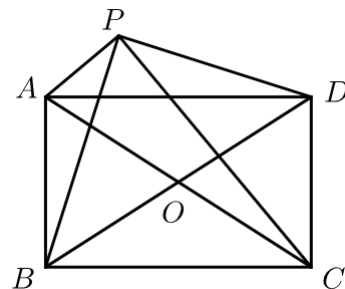
$$\therefore DE \parallel BC ,$$

$$\therefore \text{ 四边形 } BCDE \text{ 是矩形} .$$

【重点强调】

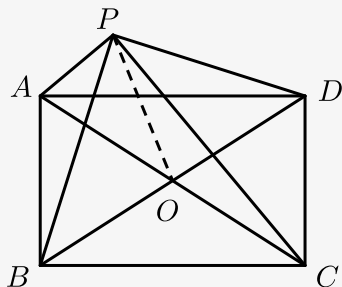
2018~2019学年天津河西区初二下学期期中（第一学片）第23题8分

20. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， AC ， BD 交于点 O ， P 是平行四边形 $ABCD$ 外一点，且 $\angle APC = \angle BPD = 90^\circ$ ，求证：平行四边形 $ABCD$ 是矩形．



【答案】证明见解析．

【解析】连接 PO ，

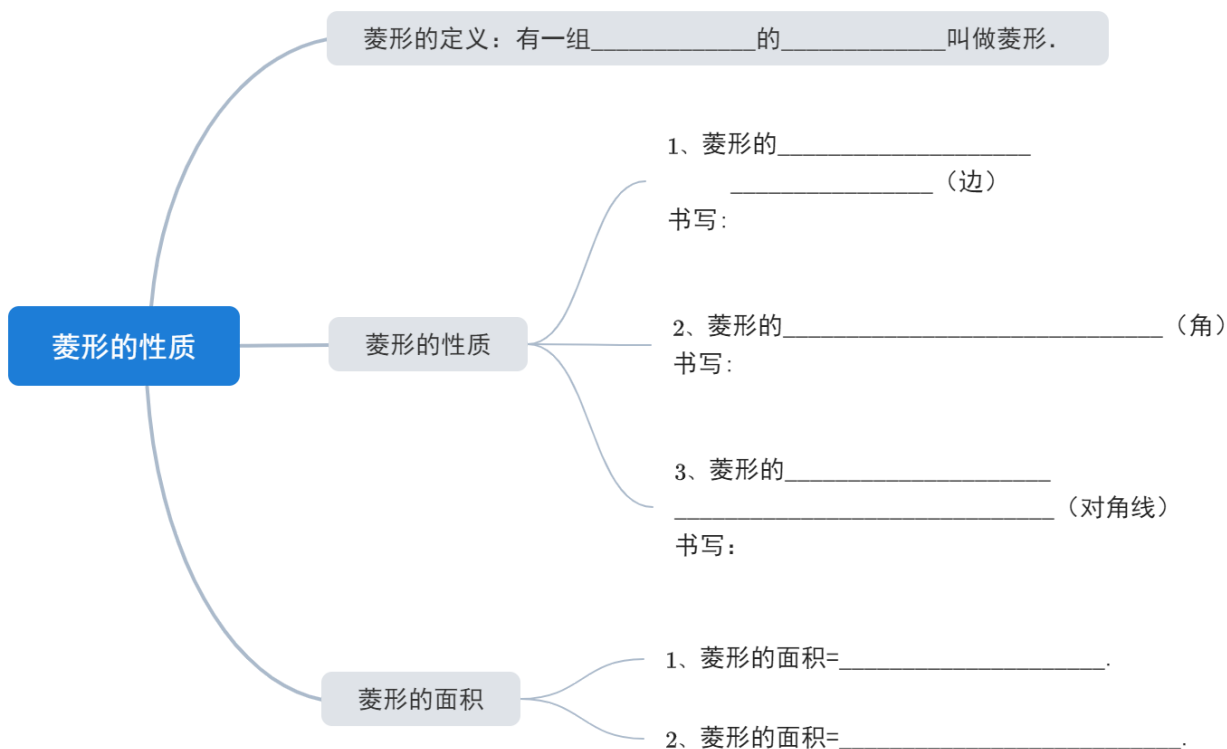


$\because O$ 是 AC 、 BD 的中点，
 $\therefore AO = CO$ ， $BO = DO$ ，
在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中，
 $\because O$ 为 BD 中点，
 $\therefore PO = \frac{1}{2}BD$ ，
在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中，
 $\because O$ 为 AC 中点，
 $\therefore PO = \frac{1}{2}AC$ ，
 $\therefore AC = BD$ ，
又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形．

【重点强调】

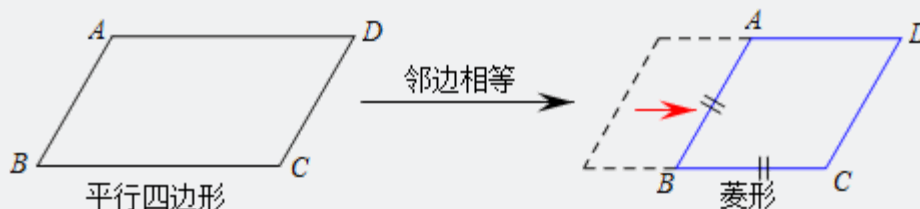
2015~2016学年天津和平区初二下学期期中第25题

三、菱形的性质



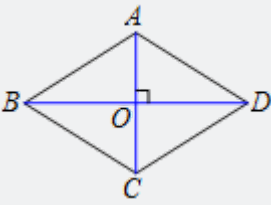
【教法备注】

1、菱形的定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形。



2、菱形的性质：

菱形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质，还具有自己独特的性质。

图形	性质		符号表示
菱形 $ABCD$ 	边	菱形的四条边都相等 菱形的对边平行	$AB = BC = CD = DA$ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
	角	菱形的对角相等	$\angle DAB = \angle BCD,$ $\angle ABC = \angle ADC$
	对角线	菱形的两条对角线互相平分 菱形的两条对角线互相垂直, 并且每一条对角线平分一组对角	$OA = OC,$ $OB = OD$ $AC \perp BD$ AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$

注意：加粗字体为菱形具有而平行四边形没有的性质。

书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = BC = CD = DA, AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

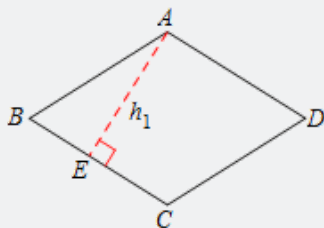
$\angle DAB = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC, OA = OC, OB = OD, AC \perp BD,$

AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD, BD$ 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 。

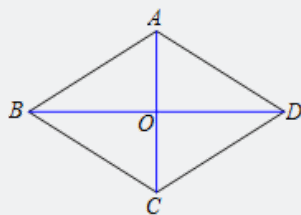
注意：做题时根据实际需要，只写出相应的性质即可。

3、菱形的面积：

①菱形的面积等于底乘以高。如图，面积 $S_{\text{菱形}ABCD} = BC \cdot AE$ 。



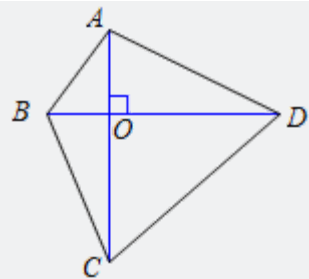
②菱形的面积等于对角线乘积的一半。如图，面积 $S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ 。



【拓展】

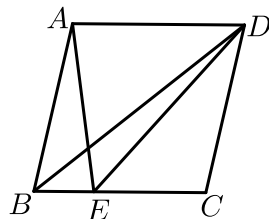
对角线互相垂直的四边形的面积都可以通过对角线乘积的一半来计算。

如图，四边形 $ABCD$ ， $AC \perp BD$ ，则 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ 。



例题

21. 如图， E 是菱形 $ABCD$ 的边 BC 上一点，且 $\angle DAE = \angle ABC = 80^\circ$ ，连接 BD ， DE ，那么 $\angle BDE$ 的度数为（ ）。



A. 10°

B. 15°

C. 25°

D. 30°

【答案】A

【解析】 $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle AEB = \angle DAE = \angle B = 80^\circ,$$

$$\therefore AE = AB = AD,$$

$$\triangle AED \text{ 中, } AE = AD, \angle DAE = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 50^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle B = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BDC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BDC - \angle CDE = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ.$$

【标注】【知识点】菱形的性质

【能力】推理论证能力

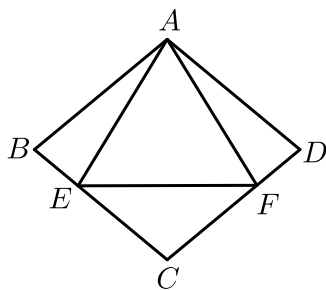
【思想】数形结合思想

【重点强调】

2018~2019学年天津河西区初二下学期期中（第三学片）第10题3分

练习

22. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， $\triangle AEF$ 是等边三角形，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，且 $AB = AE$ ，则 $\angle B$ 等于 _____ $^{\circ}$ 。



【答案】 80

【解析】 $\because AB = AE$,
 $\therefore \angle ABE = \angle AEB$ (等边对等角) ,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形 ,
 $\therefore \angle ABC = \angle ADC$ (菱形的对角相等) ,
 $AD \parallel BC$ $AB \parallel CD$ (菱形的对边平行) ,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle DCB + \angle ADC = 180^{\circ}$ (两直线平行 , 同旁内角互补) ,
 $\therefore \angle AEC + \angle ABC = 180^{\circ}$,
 $\angle ABC = \angle ADC$,
 $\angle ABE = \angle AEB$,
 $\angle DCB + \angle ADC = 180^{\circ}$,
 $\therefore \angle AEC = \angle BCD$,
 同理 $\angle BCD = \angle AFC$,
 $\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形 ,
 $\therefore \angle EAF = 60^{\circ}$ (等边三角形的三个角相等 , 并且每个角都等于 60°) ,
 $\therefore \angle EAF + \angle AEC + \angle ECF + \angle AFC = 360^{\circ}$ $\angle EAF = 60^{\circ}$,
 $\therefore \angle AEC + \angle ECF + \angle AFC = 300^{\circ}$,
 $\therefore \angle BCD = \angle AFC$ $\angle AEC = \angle BCD$,
 $\therefore 3\angle ECF = 300^{\circ}$,
 $\therefore \angle ECF = 100^{\circ}$,
 $\therefore AB \parallel CD$ $\angle ECF = 100^{\circ}$,
 $\therefore \angle B = 80^{\circ}$ (两直线平行 , 同旁内角互补) .

【标注】 【知识点】 平行线的性质

【知识点】等边三角形的性质

【知识点】菱形的性质

【能力】推理论证能力

【重点强调】

2015年天津津南区初三二模第17题3分

|| 例题

23. 已知菱形的周长为40cm，两条对角线之比为3:4，则菱形的面积为_____.

【答案】96

【解析】设两条对角线长分别为 $3x$ ， $4x$ ，

根据勾股定理可得： $\left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4x}{2}\right)^2 = 10^2$ ，

解得： $x = 4$ ，

则两条对角线长分别为12cm，16cm，

$\therefore$ 菱形的面积 $= 12 \times 16 \div 2 = 96\text{cm}^2$ ，

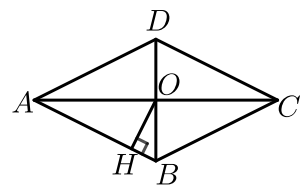
故答案为：96.

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

【重点强调】

2018~2019学年3月天津红桥区天津市方舟中学初二下学期月考第13题3分

24. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，且 $AC = 8$ ， $BD = 6$ ，过点 O 作 $OH \perp AB$ ，垂足为 H ，则点 O 到边 AB 的距离 $OH =$ _____.



【答案】 $\frac{12}{5}$ 或 2.4 或 $2\frac{2}{5}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $AC = 8$ ， $BD = 6$ ，

$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 4$ ， $BO = \frac{1}{2}BD = 3$ ．

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5$ ，

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{2} AB \cdot OH, \\ \therefore 4 \times 3 &= 5OH, \\ \therefore OH &= \frac{12}{5}.\end{aligned}$$

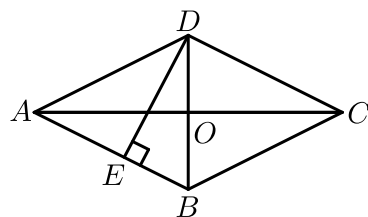
【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2015~2016学年天津和平区天津市第一中学初二下学期期中第15题

练习

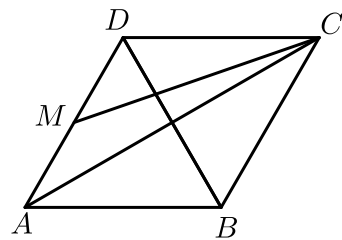
25. 已知，如图，菱形 $ABCD$ 周长是20， $BD = 6$ ， $DE \perp AB$ 于 E ，则 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ ，菱形 $ABCD$ 面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ， $DE = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】8；24； $\frac{24}{5}$

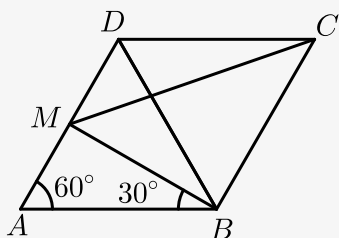
【标注】【知识点】菱形的周长与面积

26. 如图，在边长为2的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是边 AD 的中点，则 CM 的长= $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】



$\therefore$ 菱形 $ABCD$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 中点，

$\therefore \triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 为等边三角形，

$BM \perp AD$ ，

$\therefore \angle MBA = 30^\circ$ ， $\therefore MB \perp BC$ ，

$\therefore$ 边长为 2， $\therefore MB = \sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ， $\therefore MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{7}$ 。

【标注】【知识点】菱形的性质

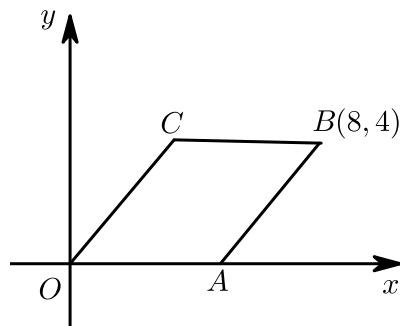
【重点强调】

2017~2018 学年天津和平区初二下学期期中第 16 题 3 分

|| 例题

💡 菱形存在性问题

27. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(8, 4)$ ，则 C 点的坐标为 _____。



【答案】 $(3, 4)$

【标注】【知识点】坐标与距离

【知识点】菱形的性质

【能力】运算能力

|| 练习

28. 平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别是 $A(-1, m)$ 、 $B(-4, 0)$ 、 $C(1, 0)$ 、 $D(a, m)$ ，且 $m > 0$ ，若以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是菱形，则点 D 的坐标为 _____。

【答案】 $(4, 4)$ 或 $(-6, \sqrt{21})$

【解析】 作 $AM \perp BC$ 于 M ，

$\therefore A(-1, m)$ 、 $B(-4, 0)$ 、 $C(1, 0)$ 、 $D(a, m)$ ，且 $m > 0$ ，

$$\therefore AD \parallel BC, OB = 4, OC = 1, OM = 1,$$

$$\therefore AD = BC = 5, BM = 3, CM = 2,$$

分两种情况：

①当点 D 在 y 轴的右侧时，如图1所示：

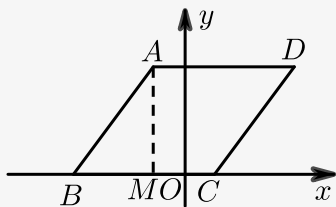


图 1

$\therefore$ 以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是菱形，

$$\therefore AB = BC = 5,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(4, 4)$ ，

②当点 D 在 y 轴的左侧时，如图2所示：

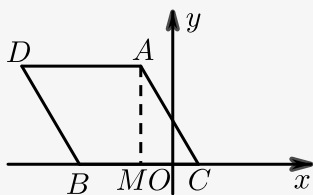


图 2

$\therefore$ 以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是菱形，

$$\therefore AB = BC = 5,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21},$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-6, \sqrt{21})$ ，

综上所述，若以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是菱形，则点 D 的坐标为 $(4, 4)$ 或 $(-6, \sqrt{21})$ 。

【标注】【能力】运算能力

【知识点】坐标与距离

【知识点】菱形的性质

【思想】分类讨论思想